线性代数　中国科学技术大学 2023 春
向量与数域

主讲: 杨金榜
地空楼 525
助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

2023 年 3 月 7 号

课程考核方式

1. 考核成绩为平时成绩、期中成绩和期末成绩加权平均. 例如, 去年的比重是 2:4:4. 具体权重会由线性代数课题组根据期中和期末考试的难易度来确定.
2. 平时成绩包含作业成绩和上课考勤两部分.

什么是线性代数 (linear algebra)?

线性代数是关于向量空间和线性映射的一个数学分支。

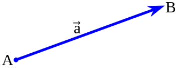
——维基百科

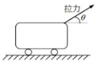
线性代数的方法广泛的用在数学其他分支、物理化学、计算机科学、经济学等学科中。例如

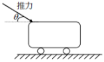
1. 泛函分析 (研究函数组成的空间);
2. 量子力学 (波函数, 密度泛函理论);
3. 科学计算 (天气预报);
4. 机器学习 (运动学正解);
5. 数据传输 (编码理论);
6. ...

什么是向量

我们初中学习过一些物理量包括速度、位移、力等等.







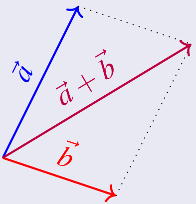
数学上的抽象总结:

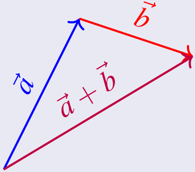
$\boxed{\text{向量 = 既有}\underline{\text{大小}}\text{，又有}\underline{\text{方向}}\text{的量.}}$

向量加法

速度, 力的合成 $\xRightarrow{\text{用数学语言抽象化}}$ 向量的加法

定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)



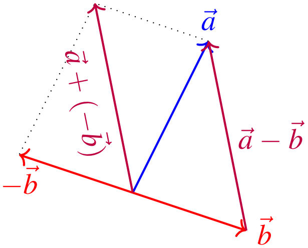


性质 (向量加法的基本性质)

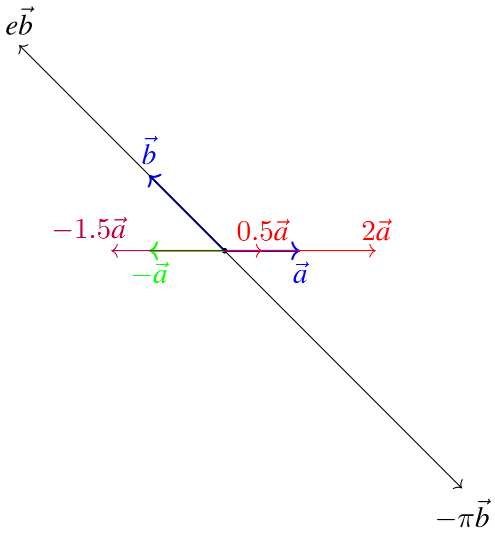
1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;

定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



向量的数乘



定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $-\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相反的向量.

记号: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则记 $\vec{a}^0 := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 即, $\vec{a}^0$ 为方向与 $\vec{a}$ 相同的单位向量.

注：零向量:$|\vec{a}| = 0$. 规定任意方向都为零向量的方向.

性质 (向量数乘的基本性质)

5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

定义 (线性运算)

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

性质 (向量集合上线性运算的八条基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

注：我们将通过这八条性质来公理化地定义一般的线性空间或向量空间 (第五章).

$$\begin{array}{ccc} \text{空间} & \xleftrightarrow[\text{固定一个点 } O(\text{原点})]{1:1} & \text{全体向量集} \\ P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} \end{array}$$

例

设 $\vec{a}$ 为一个非零向量。则

$$\text{过原点与 } \vec{a} \text{ 平行的直线} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

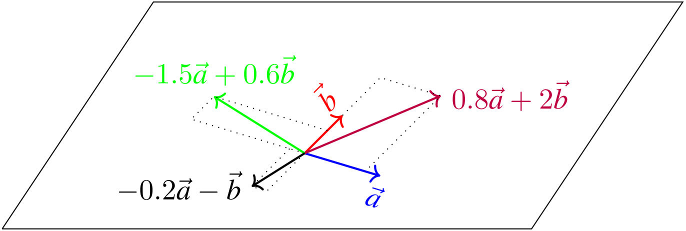
定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.



定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关.
- 反之, 若对任意一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都有
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \neq 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

特别地， 设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性无关. 若 $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

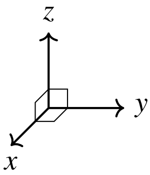
例

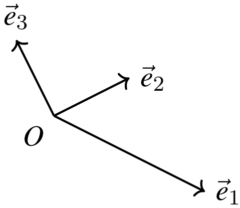
向量组 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$ 线性相关。

线性相关的几何解释

1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}=0$;
2. 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 (共线);
3. 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面;
4. 四个及四个以上的向量一定线性相关.

为了推广笛卡尔坐标系到坐标轴不相互垂直的情形,





我们需要引入向量的基本定理.

定理 (向量的基本定理)

设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为空间中的三个不共面的向量, 则对每个向量 $\vec{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3), 使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

定义 (基、坐标)

称不共面的三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为一组基. 若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的(仿射) 坐标.

$$\boxed{\text{仿射坐标系} = \text{点}O + \text{基}\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \qquad \text{记作}[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3].}$$

推论 (一一对应)

若给定仿射坐标系 $[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, 则有如下一一对应

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \text{空间} & \xleftrightarrow{1:1} & \text{全体向量集} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} & \longmapsto & \text{坐标}(x_1, x_2, x_3) \end{array}}$$

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 我们用 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. 则我们有

性质

- $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$;
- $\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$.